

Kretanje i sile u 2 i 3 dimenzije

Moment sile i rotacija

- **Moment sile**
- **Centar mase**
- **Rotaciona inercija**

Rezultati učenja

- Računanje momenta sile.
- Rešavanje problema uravnotežavanjem dva momenta u rotacionoj ravnoteži.
- Definisiranje centra mase objekta.
- Opisivanje tehnike za nalaženje centra mase tela objekta nepravilnog oblika.
- Računanje momenta inercije tela koje rotira na kraju osovine.
- Opisivanje relacija između momenta, ugaonog ubrzanja i rotacione inercije.

Pojmovi

- **Moment sile**
- **Centar mase**
- **Ugaono ubrzanje**
- **Rotaciona inercija**
- **rotacija**
- **translacija**
- **centar rotacije**
- **Rotaciona ravnoteža**
- **Krak sile**
- **centar gravitacije**
- **moment inercije**
- **Linija akcije**

Moment sile

Ključno pitanje:

Kako sila kreira rotaciju?

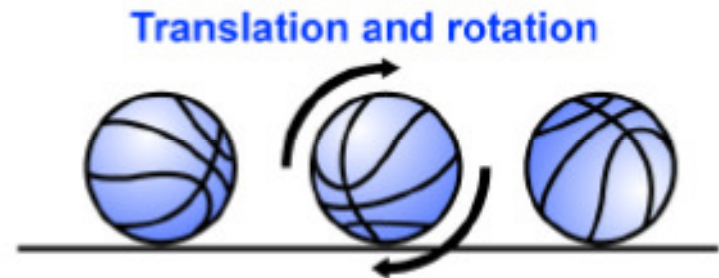
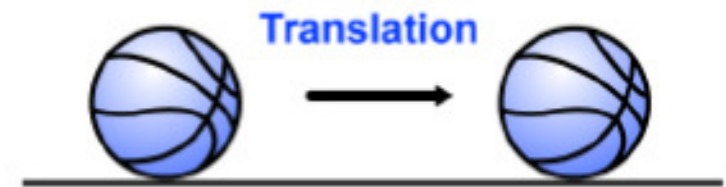


Moment sile

- **Moment sile** je akcija koja je uzrok rotiranja objekta.
- Moment sile nije isto što i sila.
- Za rotaciono kretanje moment sile je u direktnijoj relaciji sa kretanjem nego sila.

Moment sile

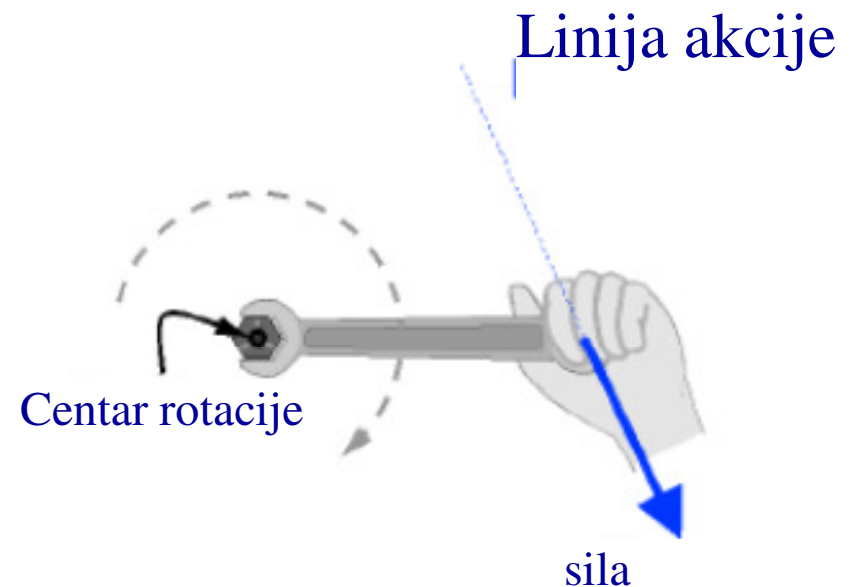
- translacija.
- rotacija.
- Tačka ili linija oko koje se neki objekat “vrti” je **centar rotacije**.
- Objekat može da se kreće i translatorno i da rotira.



Moment sile

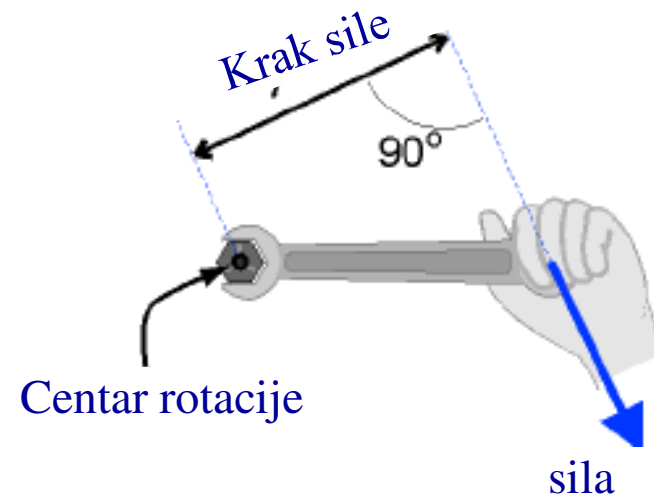
- **Moment sile se javlja** kada **linija akcije** ne prolazi kroz centar rotacije.
- **Linija akcije je** imaginarna linija koja prati pravac sile i prolazi kroz napadnu tačku sile.

Pravac sile se poklapa sa linijom akcije



Moment sile

- Da bi se dobio maksimalni moment sile, silu treba primeniti u pravcu koji kreira najveći **krak sile**.
- **Krak sile je normalno rastojanje između linije akcije sile i centra rotacije**



Moment sile

Moment sile (N·m) → $M = r \times F$

Krak sile (m)

Sila (N)



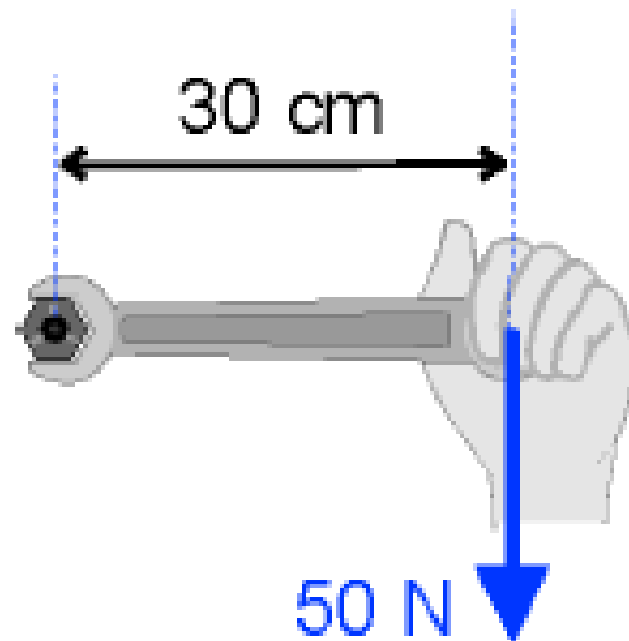
dijagram momenta sile pozitivna i negativna rotacija

Računanje momenta sile



Primer

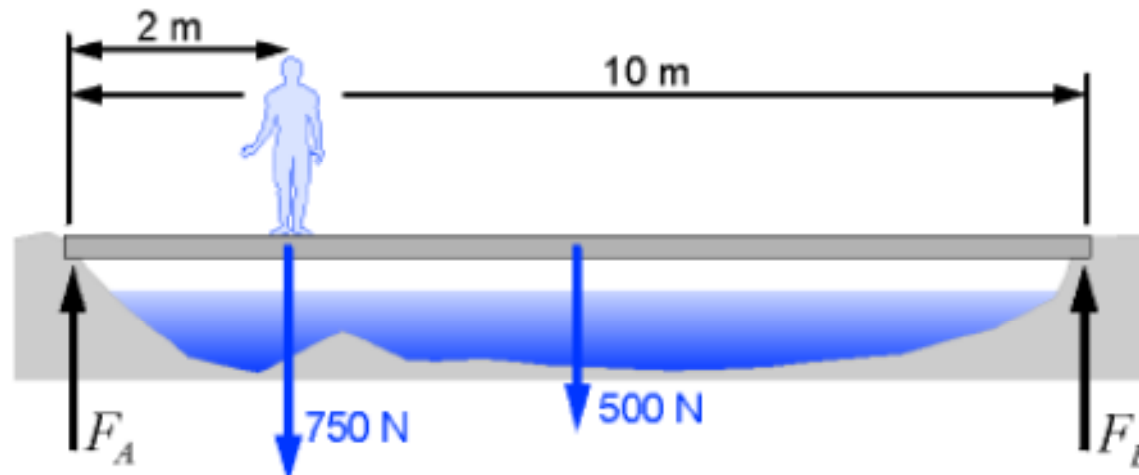
- Sila od 50 N deluje na odvijač “ključ”, dugačak 30cm.



- Izračunati moment sile ako sila dejstvuje normalno na ključ tako da je krak sile 30 cm.

Rotaciona ravnoteža

- Kada je objekt u rotacionoj ravnoteži, neto moment sila koji se primenjuje na objekat je jednak nuli.
- Rotaciona ravnoteža se često koristi za određivanje nepoznatih sila.
- Kolike su sile (F_A , F_B) koje drže most na njegovim krajevima?



Rotaciona ravnoteža

VERTIKALNA RAVNOTEŽA

$$F_A + F_B = 1,250 \text{ N}$$

$$F_A = 850 \text{ N}$$

ROTACIONA RAVNOTEŽA

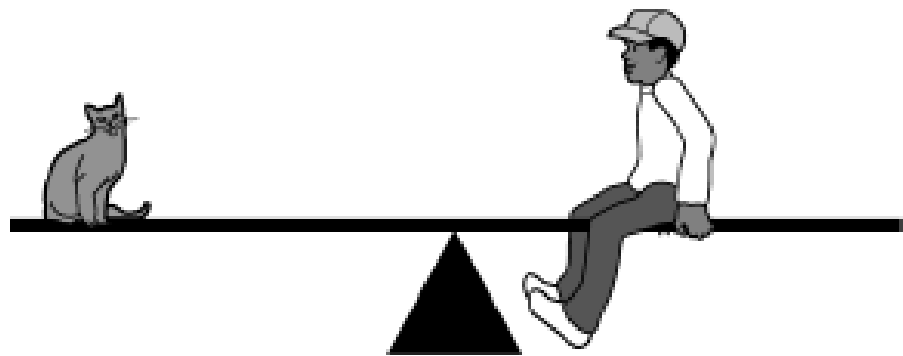
$$\begin{aligned} & - (750 \text{ N})(2 \text{ m}) \\ & - (500 \text{ N})(5 \text{ m}) \\ & + (F_B)(10 \text{ m}) = 0 \end{aligned}$$

$$- 1,500 - 2,500 + 10 F_B = 0$$

$$F_B = 400 \text{ N}$$

Računanje korišćenjem ravnoteže

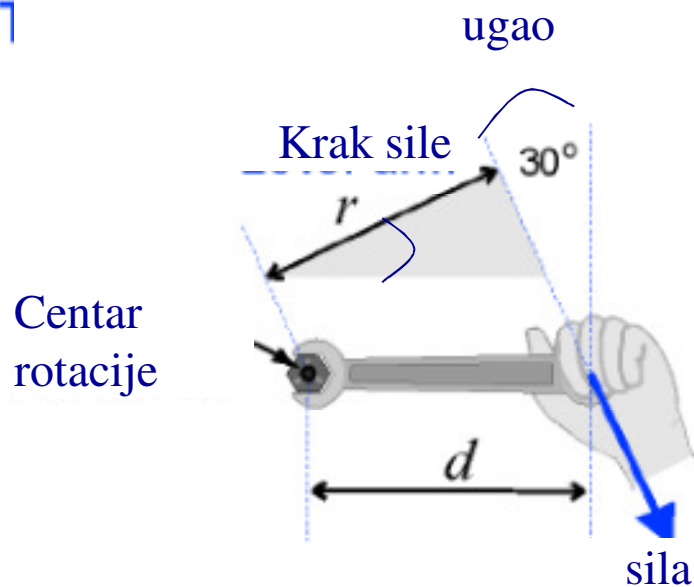
Rešiti rotacioni
problem ravnoteže



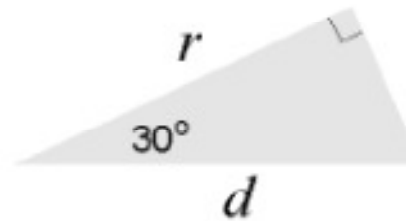
- Dečak i njegova mačka sede na klackalici.
- Mačka ima masu od 4 kg i sedi 2 m od centra rotacije.
- Ako dečak ima masu od 50 kg, gde bi trebao da sedi tako da klackalica bude u ravnoteži?

Kada sila i krak sile NISU normalni jedan u odnosu na drugi

7



Relacije u trouglu



$$\cos 30^\circ = \frac{r}{d}$$

Nalaženje momenta

$$r = d \cos 30^\circ$$

$$M = rF$$

rešenje

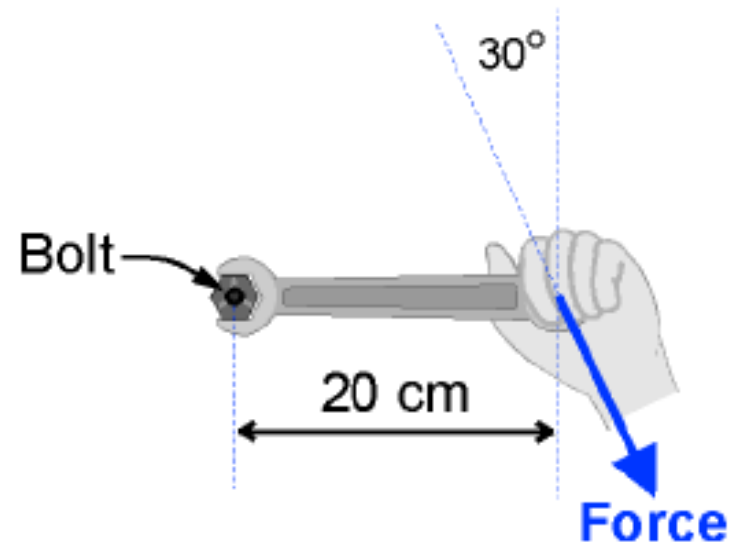
$$M = Fd \cos 30^\circ$$

Računanje momenta sile



Primer

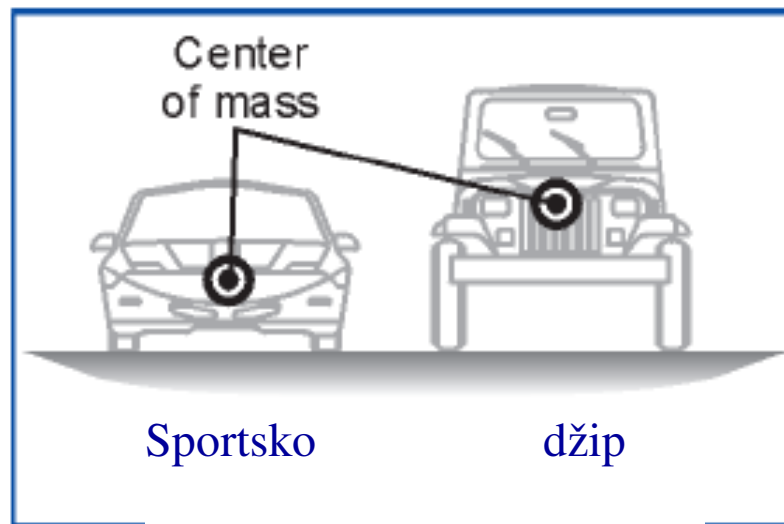
- **Odvijač dužine 20cm se koristi za odvijanje šrafa.**
- **Sila koja se primenjuje je na 0.20 m od šrafa.**
- **Za odvijanje šrafa je potrebna sila od 50N kada je ta sila normalna na odvijač.**
- **Kolika sila je potrebna za odvijanje šrafa ako je usmerena pod uglom od 30 stepeni u odnosu na normalu?**



Centar mase

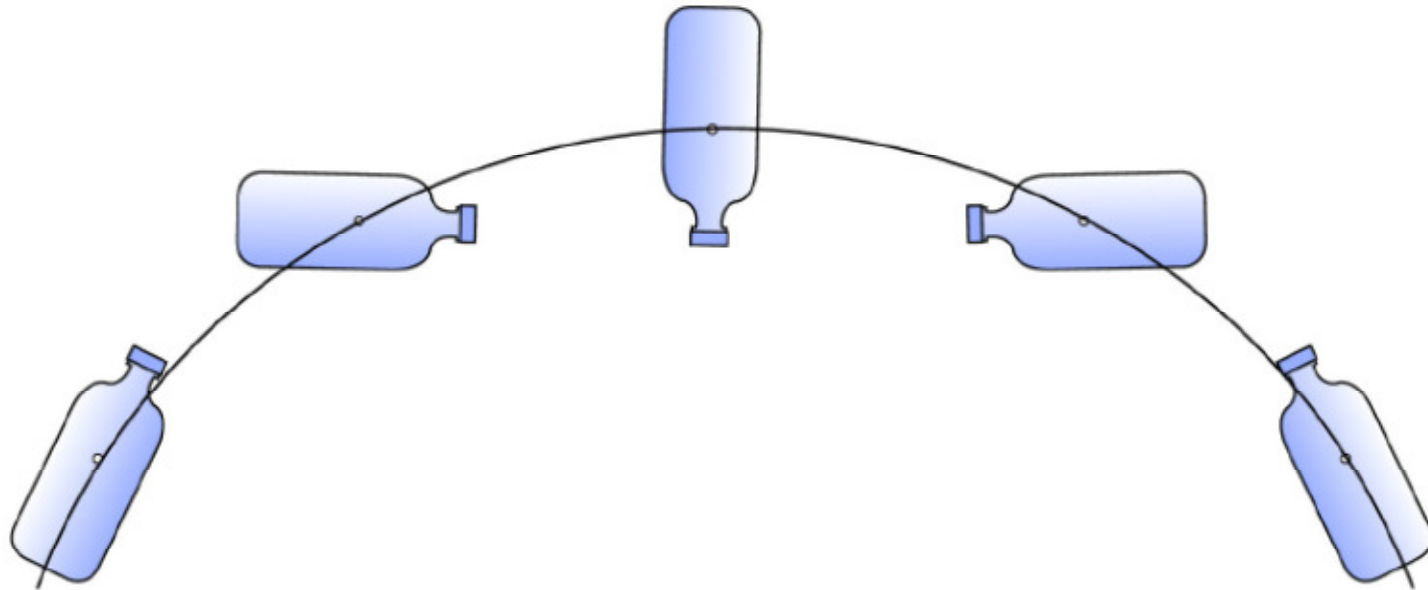
Ključno pitanje:

Kako se objekti uravnotežuju?



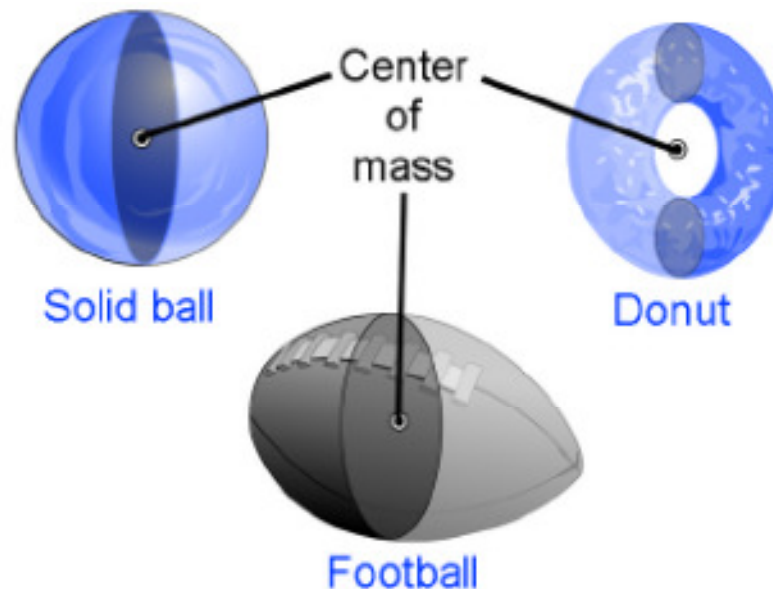
Centar mase

- Postoje tri različite ose oko kojih neki objekt prirodno rotira.
- Tačka u kojoj se seku te tri ose se naziva **centar mase**.

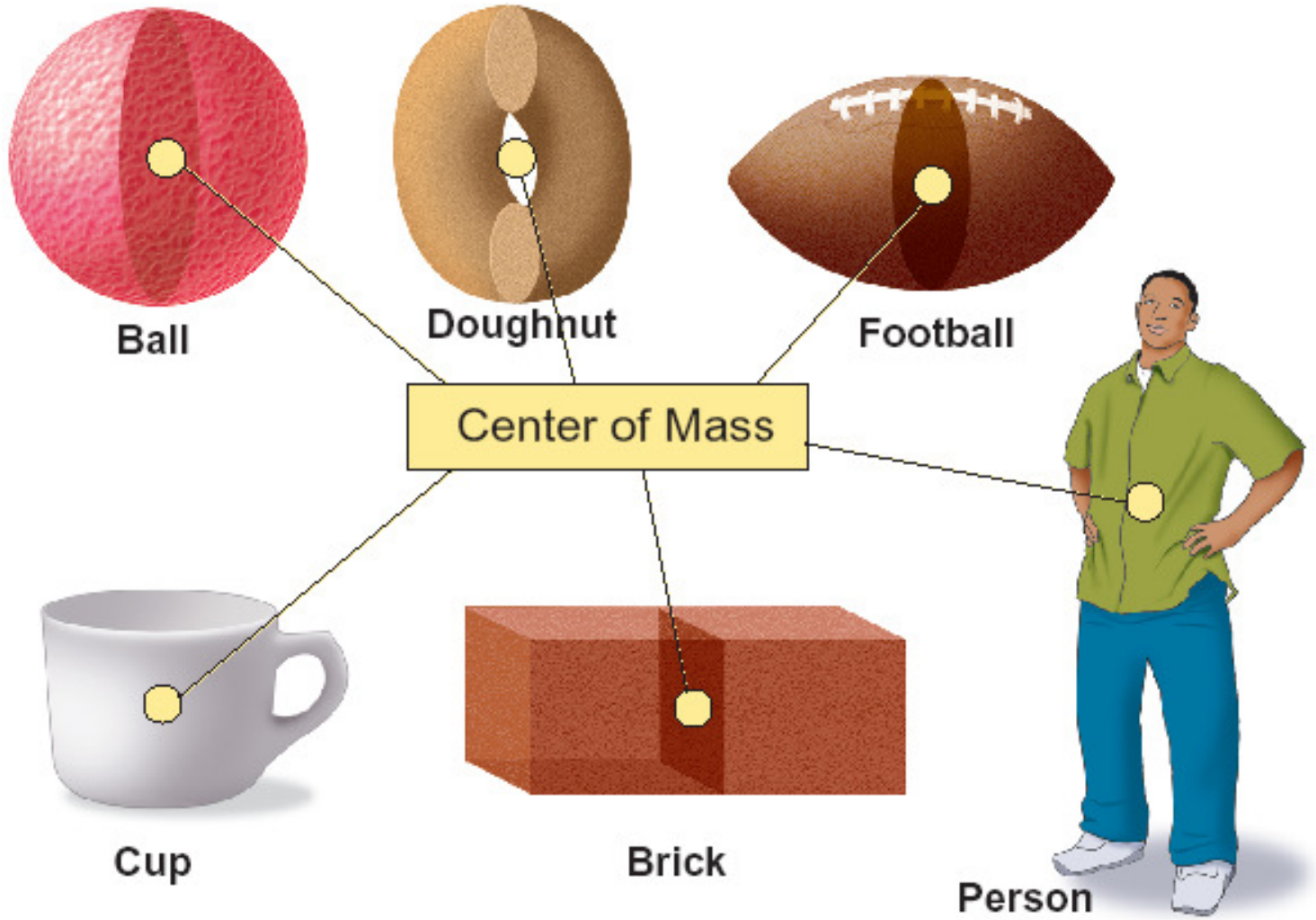


Nalaženje centra mase

- Ako neki objekat ima nepravilni oblik, centar mase se može naći rotiranjem i traženjem presečne tačke tih osa.
- nema uvek materijala u centru mase objekta.

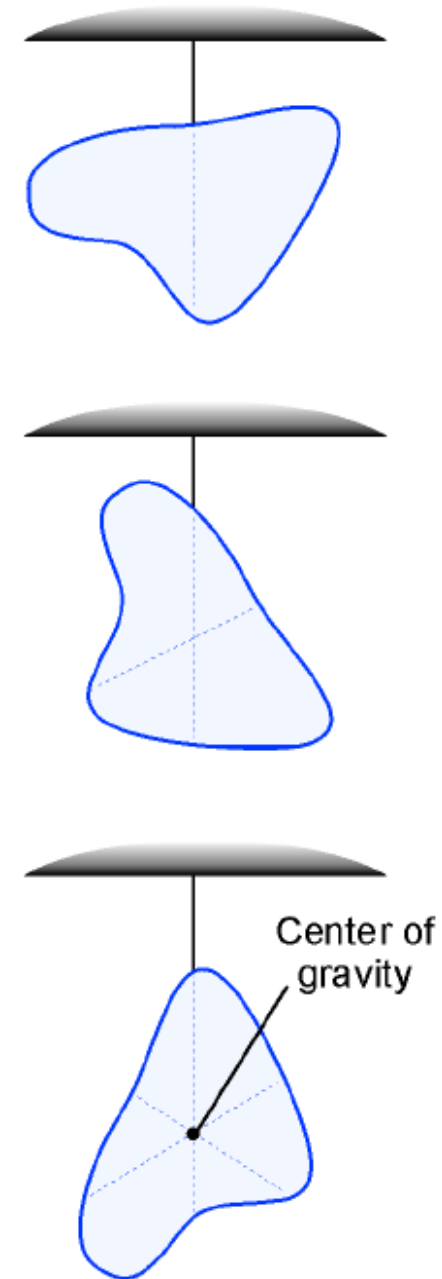


Center of Mass



Nalaženje centra gravitacije

- **Centar gravitacije** nekog objekta nepravilnog oblika se može naći pričvršćujući ga u jednoj ili više tačaka.



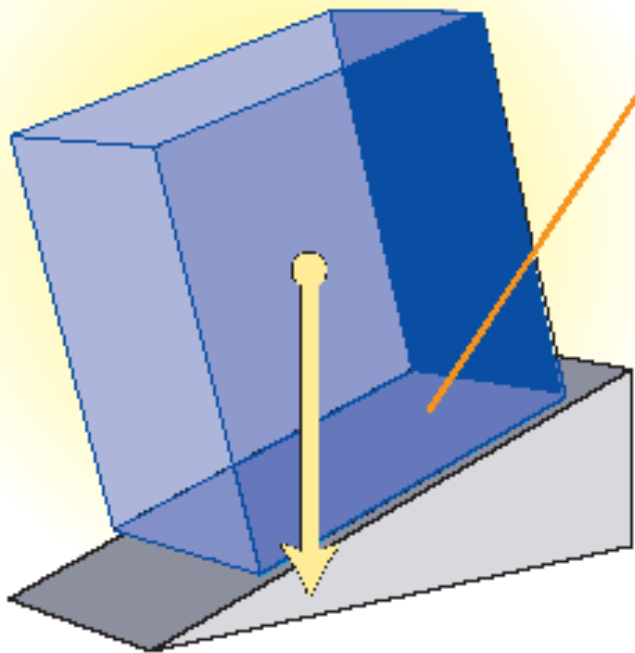
Ravnoteža i centar mase

- Za neki objekat da bi ostao uspravan, njegov centar gravitacije mora biti iznad površine oslonca.
- **Površina oslonca** uključuje celu oblast oko stvarnog oslonca.
- Objekat će se prevrnuti ako mu **centar mase** nije iznad oblasti oslonca.

Ravnoteža i centar mase

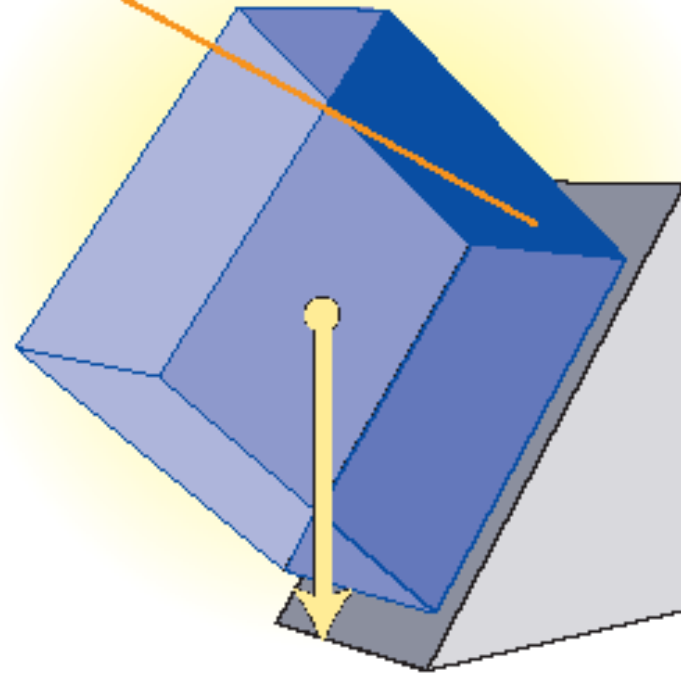
1

Oblast oslonca



Prevrtnanje

NE

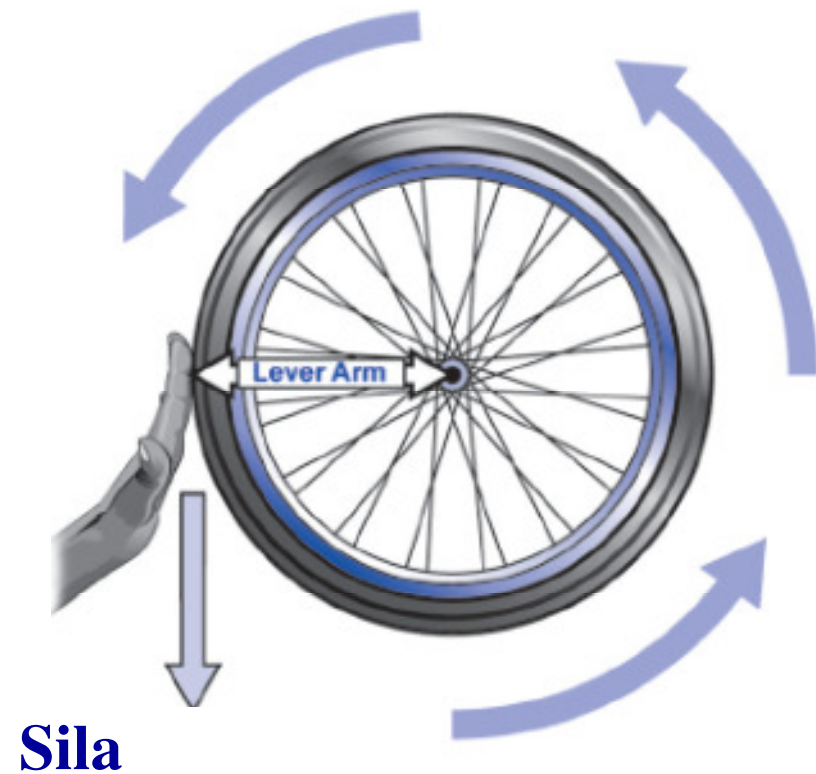


DA

Rotaciona inercija

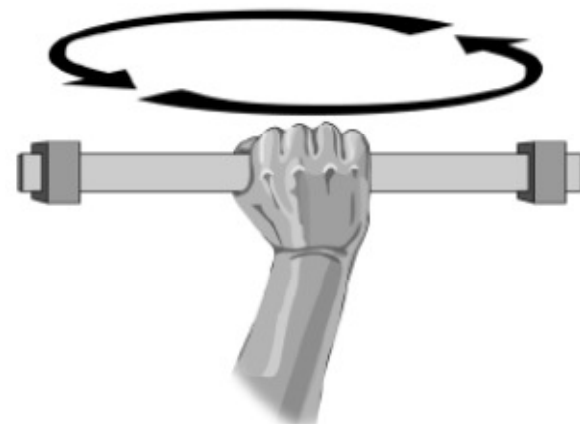
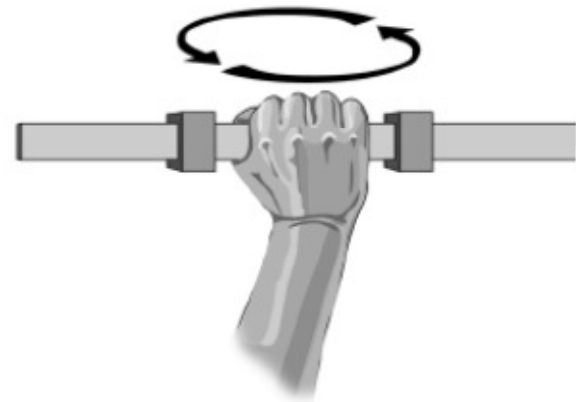
Ključno pitanje:

Da li se masa opire rotaciji na isti način kao i akceleraciji (ubrzanju) ?



Rotaciona inercija

- Inercija je ime za opiranje objekta za promenu njegovog kretanja (ili pokretanja).
- **Rotaciona inercija** je termin koji se koristi da opiše “protivljenje” objekta promeni njegovog rotacionog kretanja.
- Rotaciona inercija ne zavisi samo od ukupne mase, već i od načina kako je ta masa raspoređena (distribuirana)



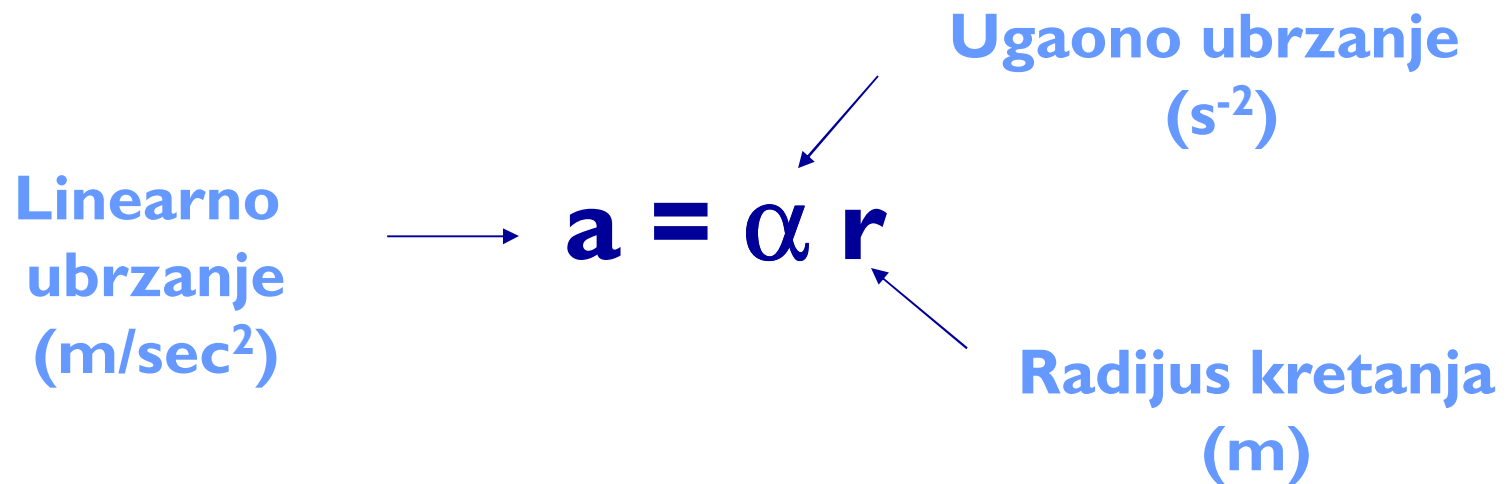
Linearno i ugaono ubrzanje

Linearno ubrzanje (m/sec²) → $\mathbf{a} = \alpha \mathbf{r}$

Ugaono ubrzanje (s⁻²)

→ $\mathbf{a} = \alpha \mathbf{r}$

Radijus kretanja (m)



Rotaciona inercija

- Da bi se napisale jednačine za rotaciono kretanje, **sila** se zamenjuje sa **momentom sile** oko centra rotacije.
- **linearno ubrzanje** se zamenjuje sa **ugaonim ubrzanjem**.

$$a = \frac{F}{m}$$

Mass (kg)

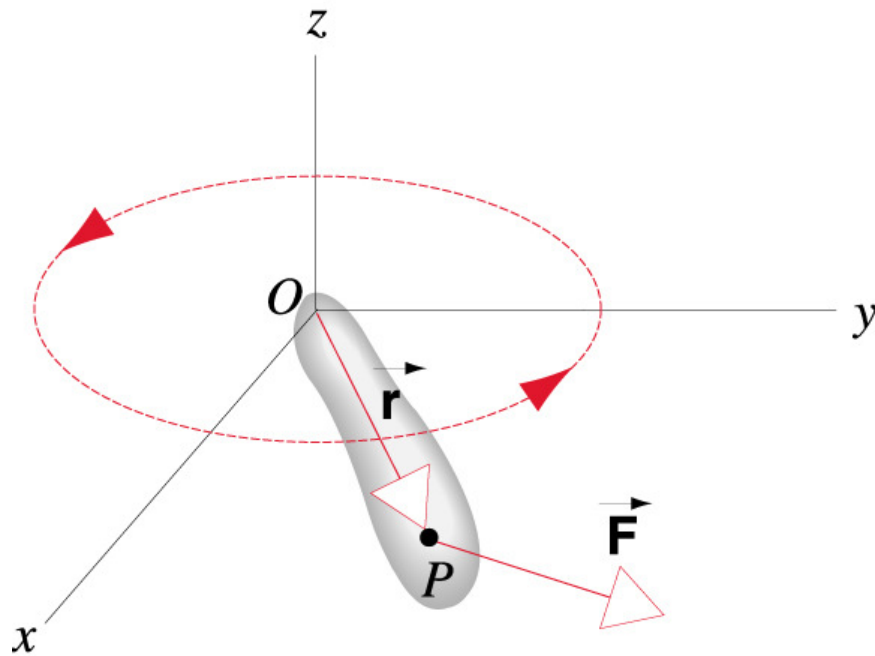
$$\alpha = \frac{M}{mr^2}$$

Rotational inertia (kg·m²)

Moment inercije

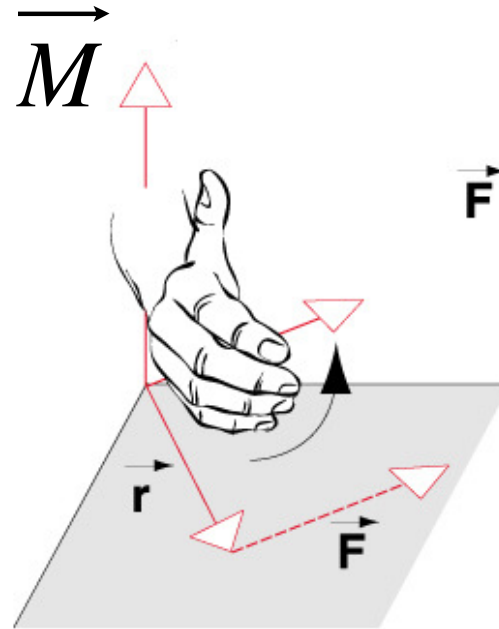
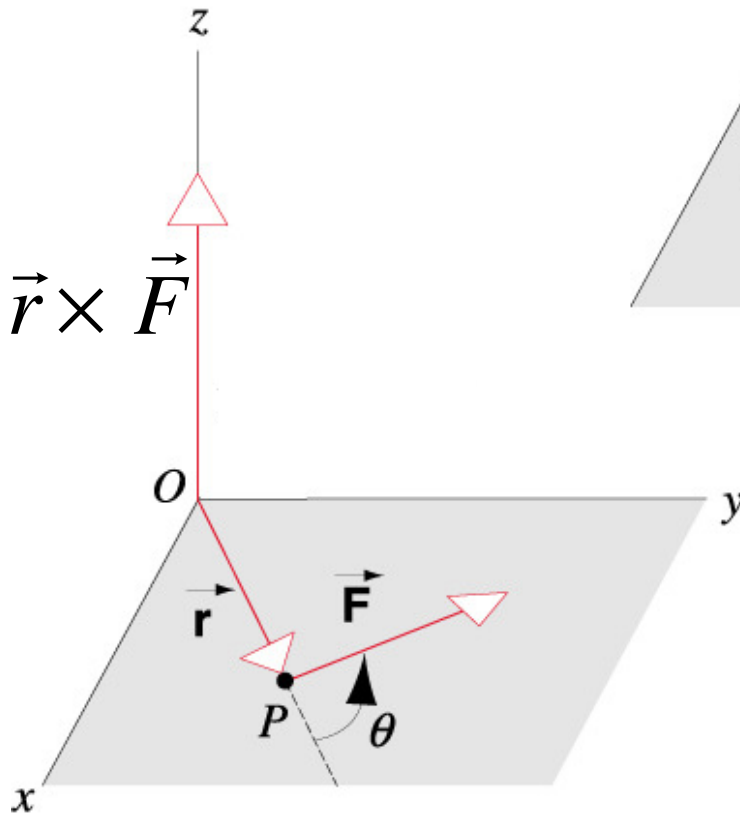
- Suma mr^2 za sve čestice koje čine čvrsto telo se naziva **moment inercije** (I).
- Čvrsto telo sadrži masu koja je distribuirana na različitim rastojanjima od centra rotacije.
- Pošto rotaciona inercija zavisi sa kvadratom radijusa, distribucija mase pravi veliku razliku između čvrstih tela.

Moment site



$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

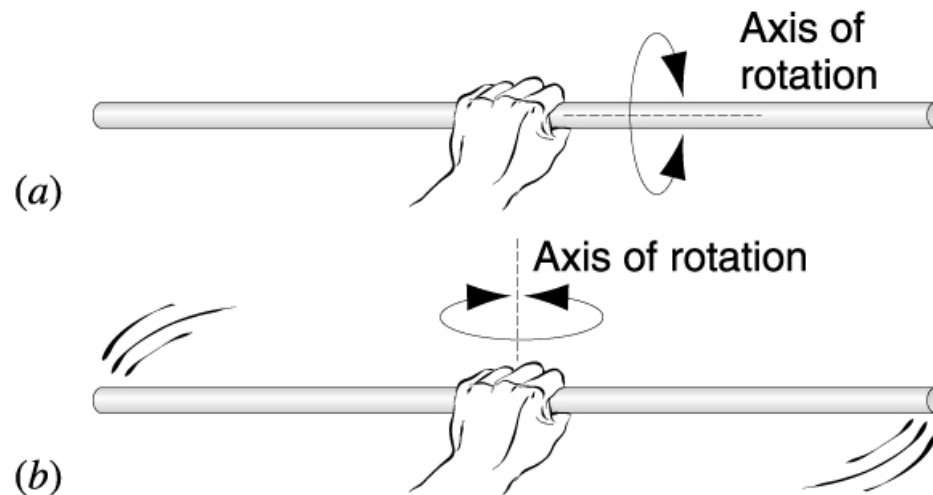


$$M = rF \sin \theta$$

Pravac: Pravilo
desne ruke (PDR)

Rotaciona inercija (moment inercije)

Rotaciona inercija je mera otpora kojim se čvrsto telo suprotstavlja promeni svoje ugaone brzine.

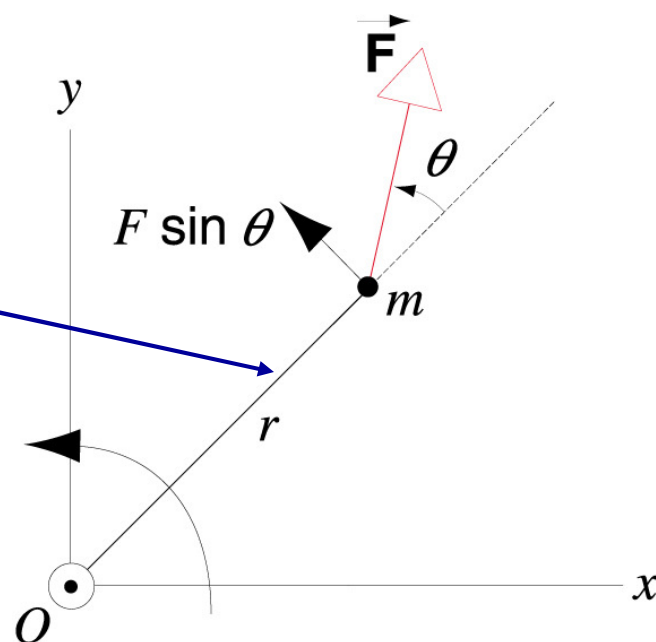


Manji napor je potreban da bi se promenila ugaona brzina u slučaju pod (a) nego pod (b)

Rotaciona inercija čestice mase m

Posmatrajmo česticu koja rotira u x-y ravni, oko z-ose.

Štap sa
zanemarljivom
masom



Vrednost tangencijalne komponente sile je:

$$F_T = F \sin \theta$$

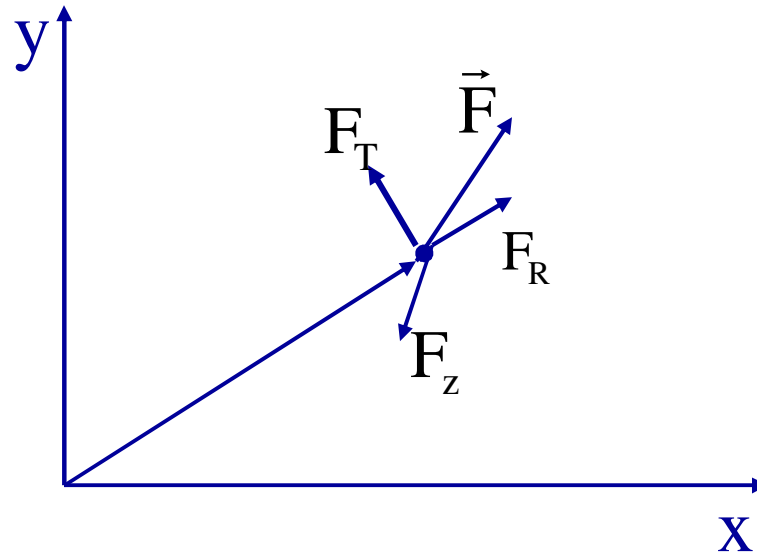
Povezujući tangencijalnu silu sa tangencijalnim ubrzanjem,

$$F \sin \theta = ma_T = mr\alpha_z$$

Sada je moment sile oko tačke O:

$$M_z = rF \sin \theta = mr^2 \alpha_z = I \alpha_z$$

gde je, $I = mr^2$ moment inercije

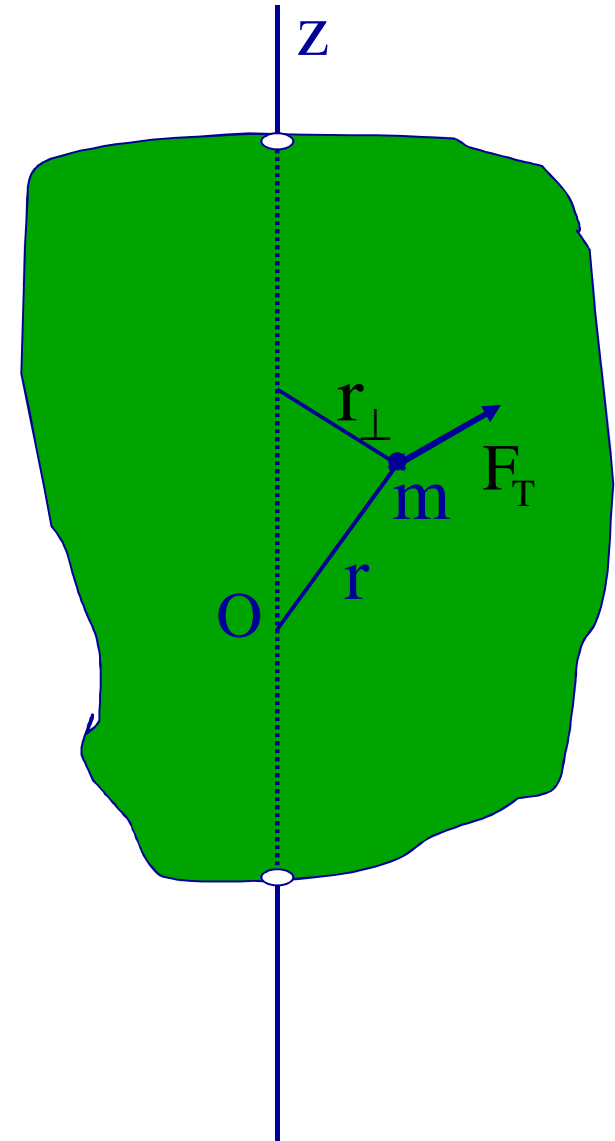


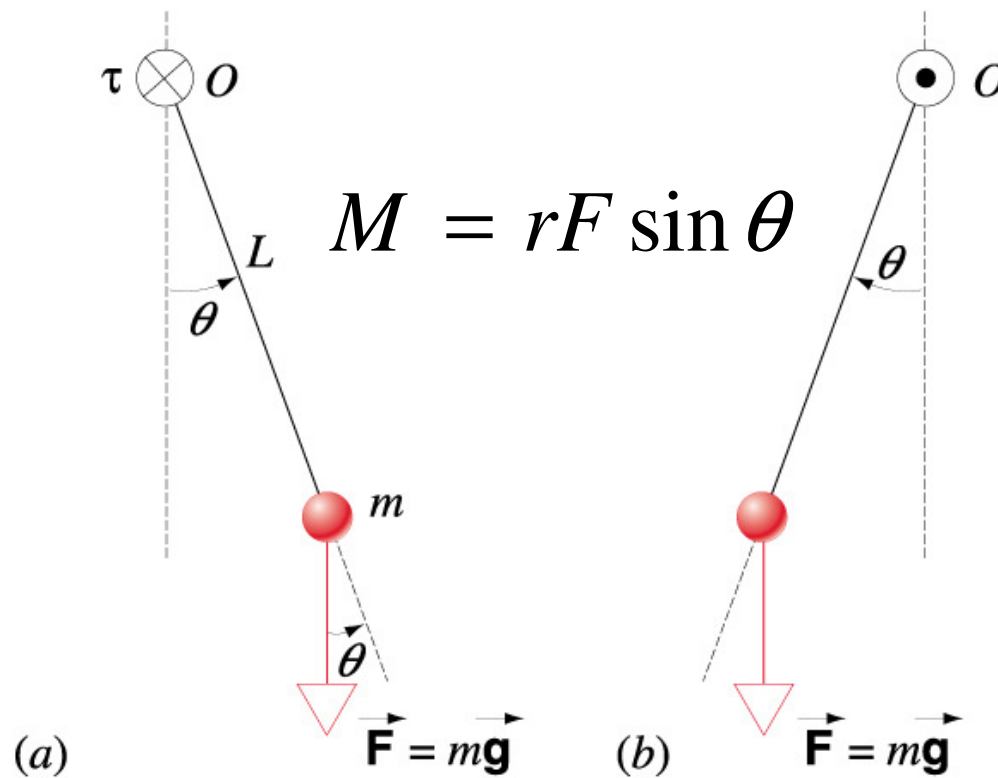
$$F_T = ma_T = mr\alpha_z$$

$$M_z = rF_T = mr^2\alpha_z$$

Trodimenziono čvrsto telo

$$\begin{aligned} M_{i,z} &= r_{i\perp} F_{iT} \\ &= \mathbf{r}_{i\perp} m_i \mathbf{a}_{iT} \\ &= m_i r_{i\perp}^2 \alpha_z \end{aligned}$$





Notirati: Moment sile zavisi od referentne tačke. Ta tačka rotacije se može izabrati tako da je moment sile nula iako je sila različita od nule.

Jednačina rotacione dinamike

$$M_z = \sum_{i=1}^N M_{i,z} = I \alpha_z$$

Gde je, $I = \sum_{i=1}^N m_i r_{i\perp}^2$ moment inercije za datu osu rotacije.

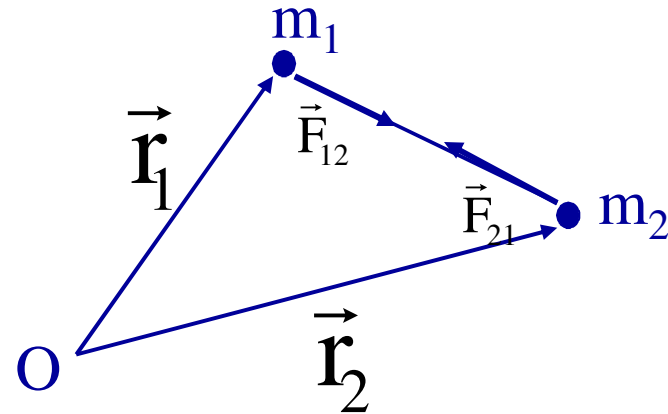
$r_{i\perp}$ = normalno rastojanje

i-te čestice od ose rotacije

Moment unutrašnjih sila jednak je nuli

Doprinos od dve unutrašnje sile za ukupni moment sile je:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21} \\ = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12} = \vec{0} \end{aligned}$$



Pošto unutrašnje sile formiraju par kao na slici ukupni moment sile jednak je nuli.

Dakle, jednačina rotacione dinamike:

$$M_{ext,z} = I\alpha_z$$

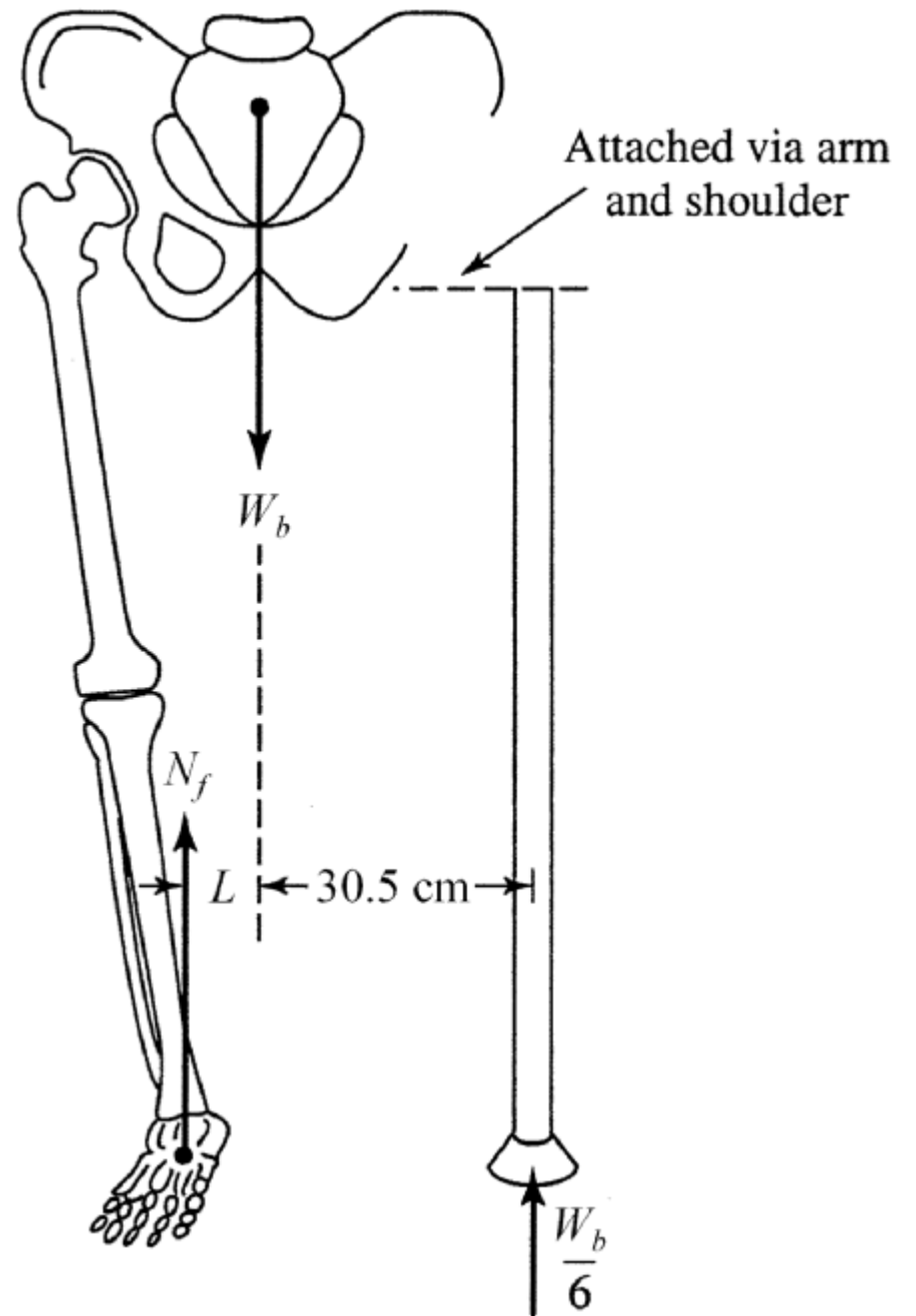
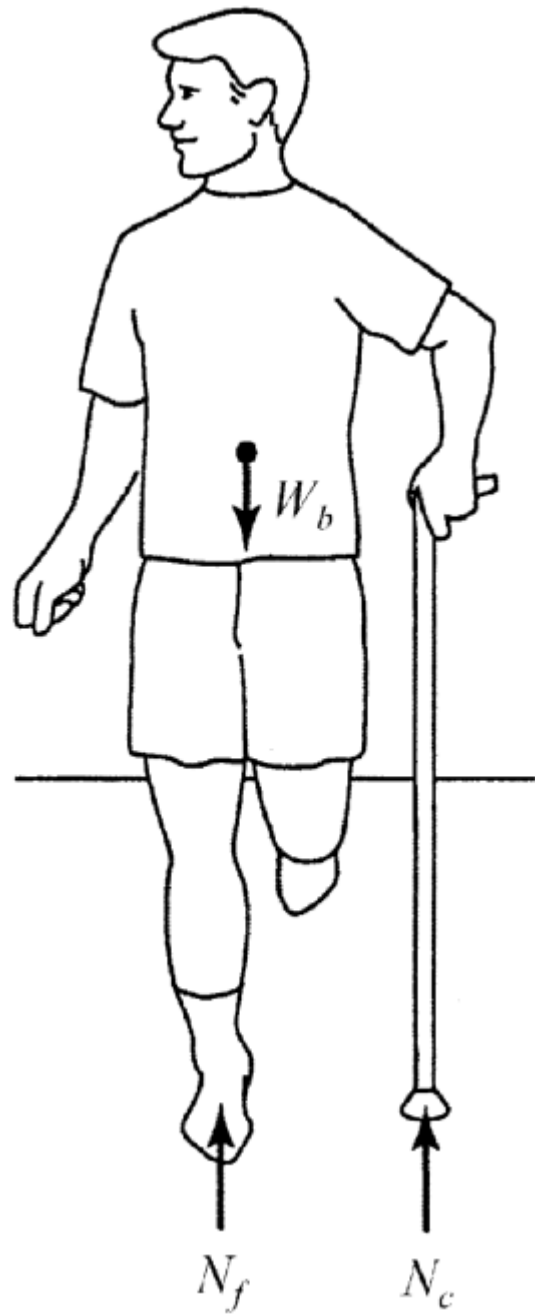
Ravnoteža

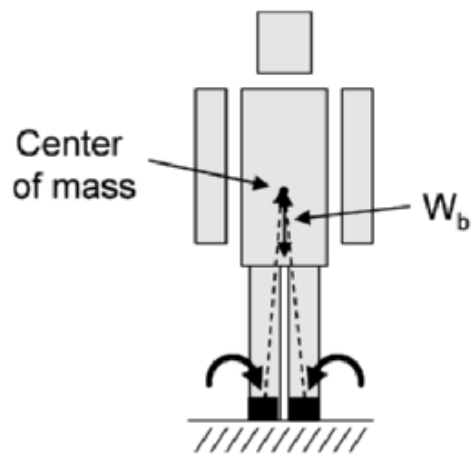
Za ravnotežu translacionu i rotacionu, rezultantna sila i rezultantni moment sile moraju biti jednaki nuli.

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$$

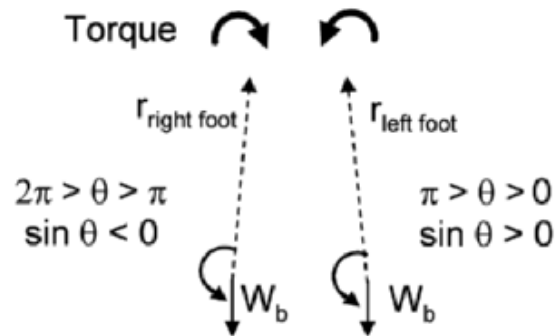
$$\sum \vec{M}_{\text{ext}} = \vec{0}$$

Notirati: Pod gornjim uslovima ako je moment sile jednak nuli oko jedne tačke, takođe je jednak nuli oko bilo koje druge.

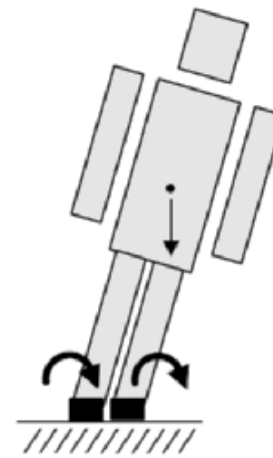




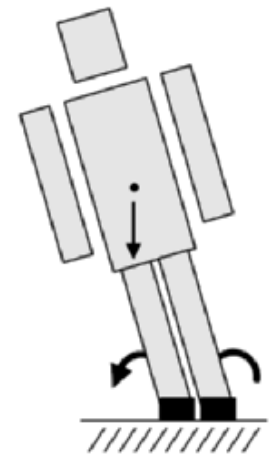
(a) Stable



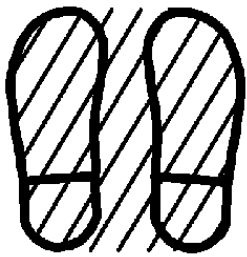
(b) Torque diagram for (a)



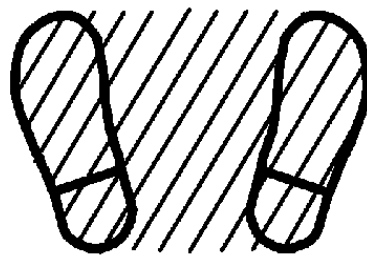
(c) Unstable



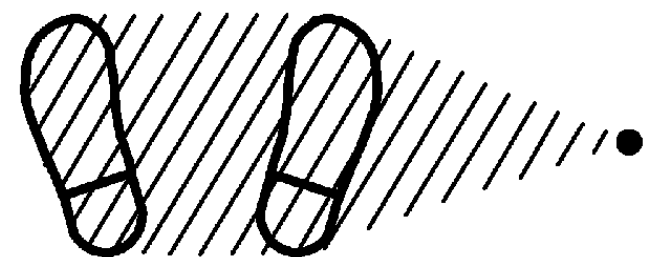
(d) Unstable



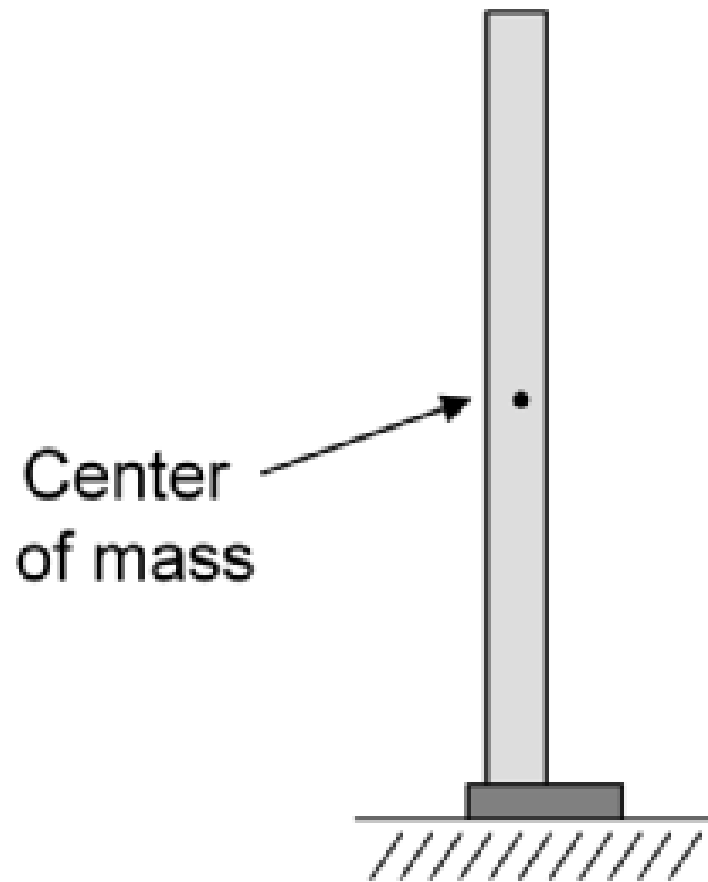
(a)



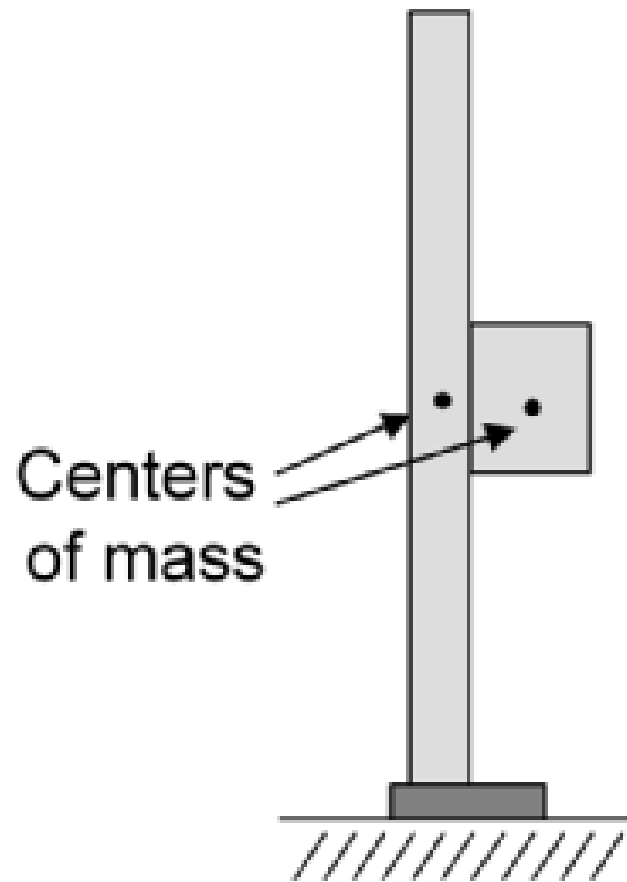
(b)



(c)



(a)



(b)